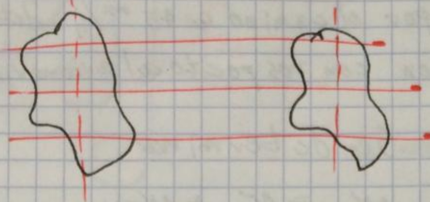
P3

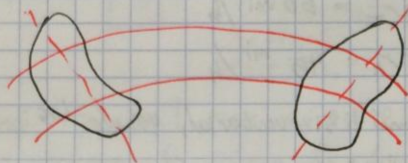
16 12 14

Cinemática en el plano de un Cuerpo Rígido

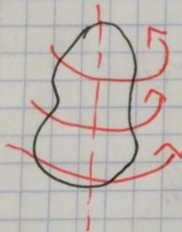
Movimiento de un cuerpo rígido



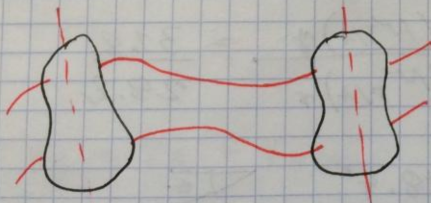
Traslación Rectilínea



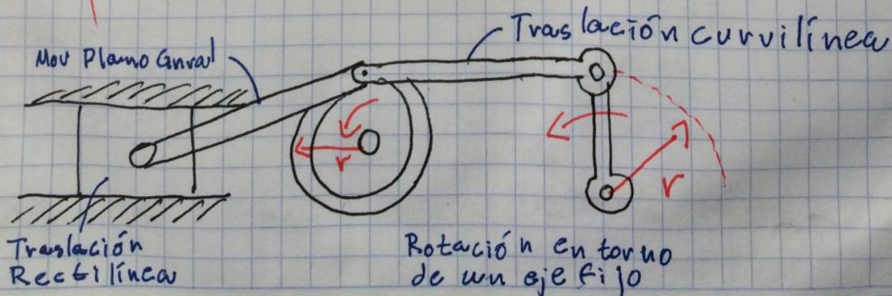
Traslación curvilínea



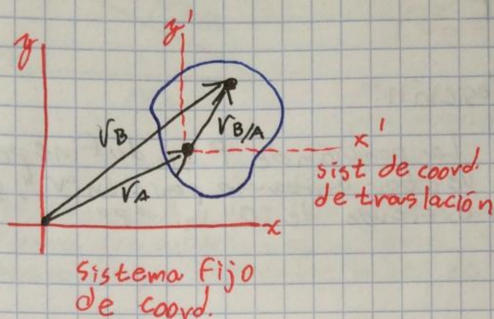
Rotación en torno de un eje fijo



Movimiento en un plano general



Traslación



Posición:

$$r_B = r_A + r_{B/A}$$

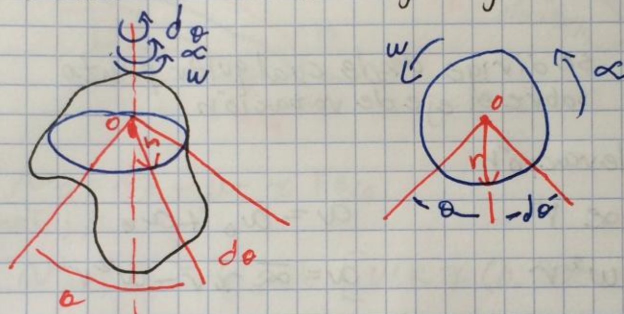
velocidad:

$$v_A = v_B$$

Accel

$$a_B = a_A$$

Rotación torno de un eje fijo



El cambio en la posición angular se mide el diferencial dθ, se conoce como desplazamiento angular y se mide en grados, radianes o revoluciones

Velocidad angular

$$\omega = \frac{d\theta}{dt}$$

Aceleración angular

$$\alpha = \frac{d\omega}{dt}$$

$$\alpha d\theta = \omega d\omega$$

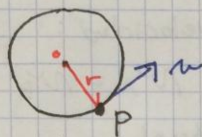
Accel angular cte.

$$\omega = \omega_0 + \alpha t$$

$$\theta = \theta_0 + \omega_0 t + \tfrac{1}{2}\alpha t^2$$

$$\omega^2 = \omega_0^2 + 2\alpha(\theta - \theta_0)$$

Movimiento del punto P

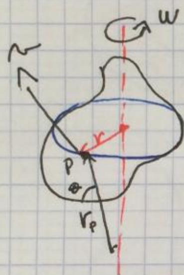


Posición:

La posición de P se define por el vector ~~unitario~~ posición "r", que se extiende de "O" a "P"

Velocidad

$v = \omega r$ $\qquad$ $v = \bar{\omega} \times r_P$



r_P = se dirige desde cualquier punto sobre el eje de rotación

Aceleración

$a_t = \alpha r$ $\qquad$ $a = a_t + a_n$

$a_n = \omega^2 r$ $\qquad$ $a = \bar{\alpha} \times r - \omega^2 r$

Análisis del movimiento relativo: velocidad

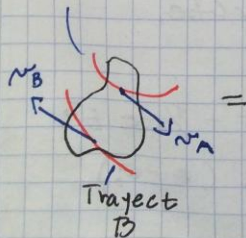
Posición

$r_B = r_A + r_{B/A}$

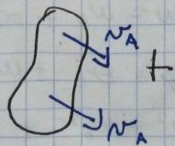
Velocidad

$v_B = v_A + v_{B/A}$

Trayectoria de A



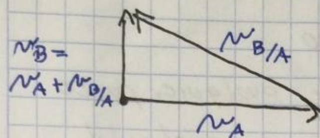
=



+



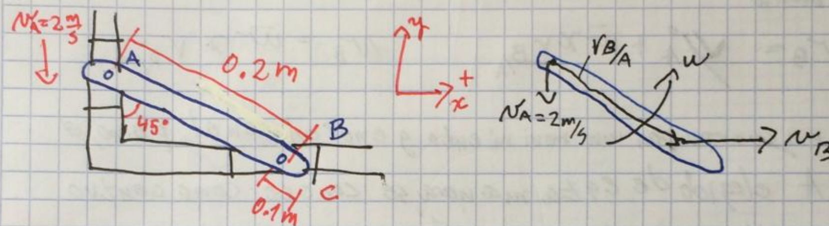
$v_{B/A} = \omega\, r_{B/A}$



$$v_B = v_A + \omega \times r_{B/A}$$

v_B = vel B ω = vel angular del cuerpo
v_A = vel A $r_{B/A}$ = vector pos relativo de A a B

Ej) Dos bloques en A y B que se mueven en las ranuras fijas guían la barra que aparece en la figura. Si la vel de A es de 2 m/s hacia abajo, determine la vel de B en $\theta = 45°$.



$$v_B = v_A + \omega \times r_{B/A}$$

comp i, j, k

$$v_{B/A} = -2j + [\omega k \times (0.2 sen 45\ i - 0.2 \cos 45\ j)]$$

$$\begin{vmatrix} i & j & k \\ A_x & A_y & A_z \\ B_x & B_y & B_z \end{vmatrix} \quad C = (A_y B_z - A_z B_y)i - (A_x B_z - A_z B_x)j + (A_x B_y - A_y B_x)$$

$$\begin{vmatrix} i & j & k \\ 0 & 0 & \omega \\ 0.2 sen 45 & -0.2 \cos 45 & 0 \end{vmatrix} = (0 - (-0.2\cos 45)(\omega))i + (0 - (0.2 sen 45)\omega)j + (0-0)k$$

$$= \omega\, 0.2 \cos 45\ i + \omega\ sen 45\ j$$

$$v_{B_i} = -2j + 0.2\omega\ sen 45\ j + 0.2\omega \cos 45\ i$$

iguala las componentes i y j

$$v_B = 0.2\omega \cos 45 \quad , \quad 0 = -2 + 0.2\omega\ sen 45°$$

$$\omega = 14.1\ rad/seg \qquad v_B = 2\ m/s \rightarrow$$

Centro instantaneo, velocidad cero

Es posible determinar la velocidad de cualquier punto B localizado en un cuerpo rígido si se elige el punto de base A tenga una velocidad cero en el instante que se considera. En este caso $v_A = 0$

Por lo tanto

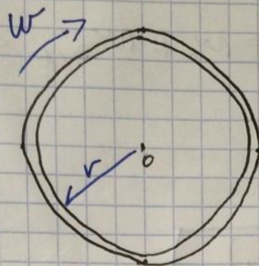
$$v_B = \cancel{v_A}^0 + \bar{\omega} \times r_{B/A} \qquad v_B = \bar{\omega} \times r_{B/A}$$

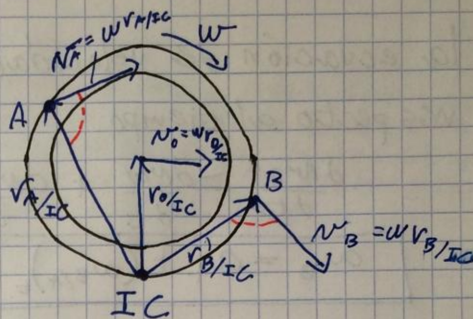
Para un cuerpo con un movimiento general en el plano, el punto A elegido de esta manera se conoce como centro instantáneo de velocidad cero.

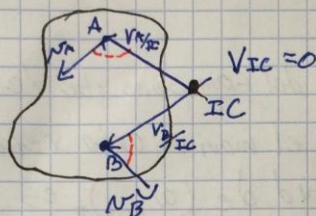
Este eje siempre es perpendicular al plano utilizado para representar el movimiento y su intersección con dicho plano nos da la ubicación de I_c como el punto A coincide con I_c $\Rightarrow v_B = \bar{\omega} \times r_{B/I_C}$

y por lo tanto el punto B se desplaza momentaneamente en torno I_c describiendo una trayectoria circular, el cuerpo parece girar en torno al eje instantáneo.

Si el vector de posición relativa r_{B/I_C} se establece desde I_c al punto B; entonces la magnitud de v_B es simplemente $v_B = \omega r_{B/I_C}$

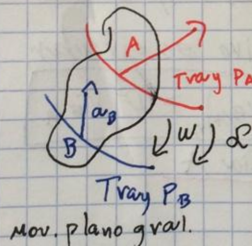






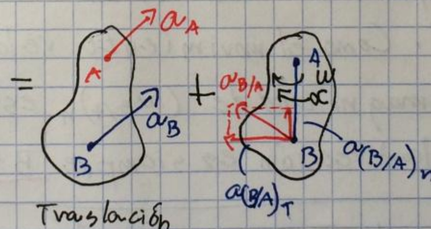
Tarea
Si la barr

Análisis del movimiento Relativo: Aceleración

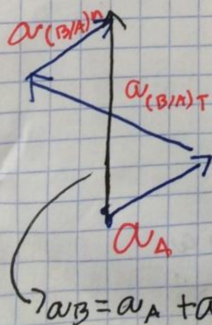


Mov. plano gral.

=



Traslación



$a_B = a_A + a_{(B/A)_T} + a_{(B/A)_n}$

Es posible determinar una ecuación que relacione las aceleraciones de dos puntos de un cuerpo rígido que experimenta un movimiento en el plano en general, al diferenciar

la ecuación de velocidad $v_B = v_A + v_{B/A}$ con respecto al tiempo

$$\frac{dv_B}{dt} = \frac{dv_A}{dt} + \frac{dv_{B/A}}{dt}$$

$$\boxed{a_B = a_A + (a_{B/A})_t + (a_{B/A})_n}$$

a_B = accel Punto B
a_A = accel Punto A

$a_{(B/A)_t}$ = accel tangencial relativa del componente de "B con respecto A". Como el movimiento relativo es circular la magnitud de $(a_{B/A})_t$ es $\boxed{(a_{B/A})_t = \alpha \, r_{B/A}}$ y la direccion es perpendicular a $r_{B/A}$.

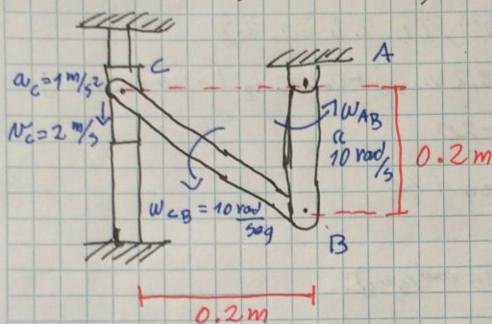
$a_{(B/A)_n}$ = Componente de accel normal relativa respecto de "A". Como el movimiento relativo es circular, la magnitud de $(a_{B/A})_n$ es $\boxed{(a_{B/A})_n = \omega^2 r_{B/A}}$ y la dirección es siempre B hacia A

$$\boxed{a_B = a_A + \bar{\alpha} \times r_{B/A} - \omega^2 r_{B/A}}$$

a_B = accel Punto B
a_A = accel punto A
$\bar{\alpha}$ = accel angular del cuerpo
$\bar{\omega}$ = velocidad angular del cuerpo
$r_{B/A}$ = vector posición relativa que se toma de A hacia B.

Continuación Cuaderno

Ej) El collarín C de la Fig se mueve hacia abajo con una accel 1 m/s². En el instante que se ilustra tiene una rapidez de 2 m/s que proporciona a las barras CB y AB una velocidad angular $\omega_{AB} = 10$ rad/s. Determine las accel angulares de CB y AB en ese instante.



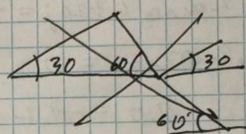
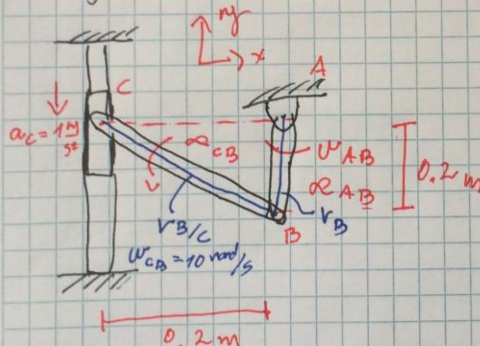


Diagrama cinético



Ecuación de la aceleración Barra AB (rot a un eje fijo)

$$a_B = \alpha_{AB} * r_B - \omega^2_{AB}\, r_B$$

$$= (\alpha_{AB}\, k) * (-0.2j) - (10^2)(-0.2j)$$

$$a_B = 0.2\alpha_{AB}\, i + 20j$$

Barra BC (mov plano general)

$a_B = a_C + \alpha_{CB} * r_{B/C} - \omega^2_{CB}\, r_{B/C}$

$0.2\alpha_{AB} + 20j = -1j + (\alpha_{CB} k) * (0.2i - 0.2j)$

$- (10^2)\ (0.2i - 0.2j)$

$0.2\alpha_{AB}\, i + 20j = -1j + 0.2\alpha_{CB}\, j + 0.2\alpha_{CB}\, i - 20i + 20j$

Asi

$0.2\alpha_{AB} = 0.2\alpha_{CB} - 20$

$20 = -1 + 0.2\alpha_{CB} + 20$

$\alpha_{CB} = 5\ rad/s^2$ ↺

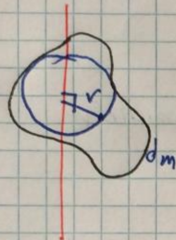
$\alpha_{AB} = -95\ rad/s^2 \Rightarrow 95\ rad/s^2$ ↻

18/12/14

Cinética en el Plano de un Cuerpo Rígido

- Fuerza y aceleración:

Momento de inercia



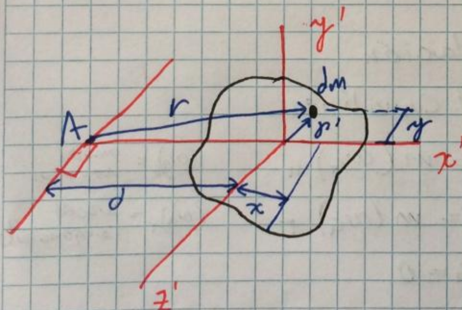
$$I = \int_m r^2 \, dm$$

El momento de inercia se define como la integral del "Segundo Momento" en torno de un eje de todos los elementos de masa dm que componen el cuerpo.

Teorema de ejes Paralelos:

$$I = I_G + md^2$$

I_G = momento de inercia en torno del eje z' que atraviesa el centro de masa G.
m = masa del cuerpo
d = dist perpendicular entre los ejes paralelos



Radio de Giro:

El momento de inercia de un cuerpo en torno de un eje específico se señala por medio del radio de giro, "K". Este valor tiene unidades de longitud y cuando éste y la masa del cuerpo "m" son datos conocidos

$$I = mK^2 \qquad K = \sqrt{\frac{I}{m}}$$

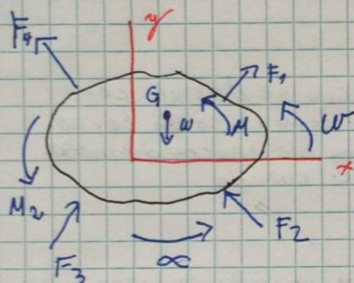
Ecuaciones de Movimiento Cinético en el Plano

Ecuación del movimiento traslacional

$$\Sigma F = m a_G$$

$$\Sigma F_x = m(a_G)_x$$

$$\Sigma F_y = m(a_G)_y$$



Eq. del mov de rotación

$$\Sigma M_G = I_G \, \alpha$$

Esta ecuación de rotación del movimiento establece que la suma de los momentos de todas las fuerzas externas, calc en torno del C.M., G, del cuerpo, es igual al producto del ~~movimiento~~ momento de inercia del cuerpo en torno de un eje que atraviesa G y la accel angular del mismo.

Ecuaciones de movimiento: Traslación

Trasl. rectilínea

$$\Sigma F_x = m(a_G)_x$$

$$\Sigma F_y = m(a_G)_y$$

$$\Sigma M_G = 0$$

Trasl. Curvilínea

$$\Sigma F_n = m(a_G)_n \qquad (a_G)_n = \text{accel normal}$$

$$\Sigma F_T = m(a_G)_T \qquad (a_G)_T = \text{accel Tangencial}$$

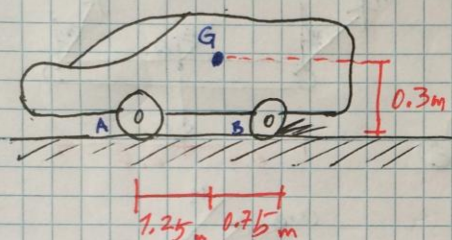
$$\Sigma M_G = 0$$

Si el cuerpo se encuentra en contacto con una superficie áspera y ocurre deslizamiento:

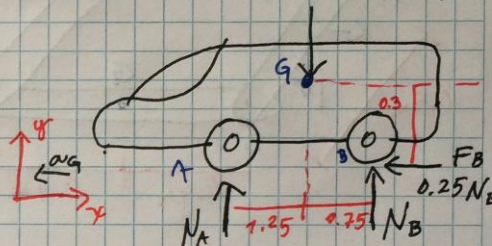
$$F = \mu_K N$$

F siempre actúa sobre el cuerpo en sentido opuesto al movimiento de éste con relación a la superficie con la que está en contacto.

Ej.) El carro de la Fig $m = 2\,Mg$ y CM en G. Determine la accel del auto si las ruedas de tracción en la parte trasera derrapan continuamente, en tanto que las delanteras giran libremente, desprecie masa de las ruedas. El coeficiente de fricción cinética de las ruedas y el camino es $\mu_K = 0.25$



Análisis



$\xrightarrow{+}$ $\Sigma F_x = m(a_G)_x$

$-0.25\,N_B = -(2000\text{ Kg})(a_G)$

$+\uparrow$ $\Sigma F_y = m\,(a_G)_y$

$N_A + N_B - 200(9.81)\,N = 0$

$\circlearrowleft$ $\Sigma M_G = 0$

$-N_A(1.25) - (0.25\,N_B)(0.3) + N_B\,(0.75) = 0$

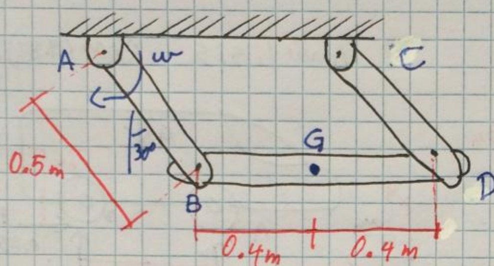
Resolviendo

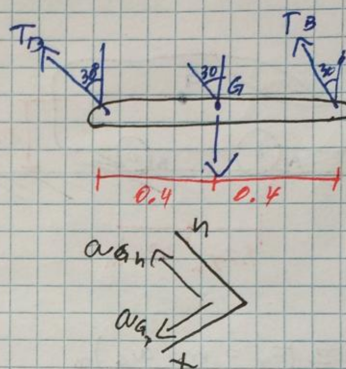
$a_G = 1.59\ m/s^2 \leftarrow$

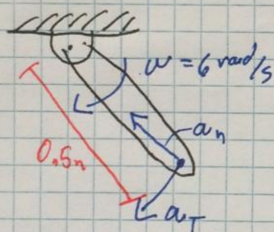
$N_A = 6.88\ KN$

$N_B = 12.7\ KN$

g) La viga BD de 100 Kg de la Fig está soportada por dos barras cuya masa es despreciable. Determine la Fuerza generada sobre cada barra en el instante $\theta = 30°$, ambas barras giran con $\omega = 6\ rad/s$







$$(a_G)_n = \omega^2 r = (6)^2 (0.5)$$

$$(a_G)_n = 18\ m/s^2$$

Eq MeV

$$+\nwarrow \Sigma F_N = m(a_G)_n \Rightarrow T_B + T_D - 9.81 \cos 30\ N = 100\,Kg\ (18\ m/s^2)$$

$$+\swarrow \Sigma F_t = m(a_G)_t \Rightarrow 981 \operatorname{sen} 30 = 100\,Kg\ (a_G)_n$$

$$\circlearrowleft + M_G = 0 \Rightarrow -(T_B \cos 30°)(0.4\ m) + (T_D \cos 30°)(0.4) = 0$$

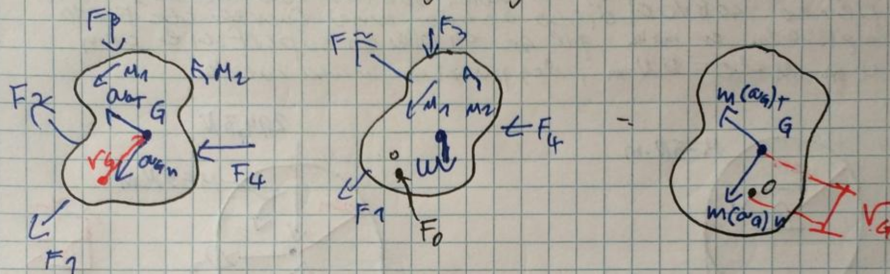
Resolviendo

$$T_B = T_D = 1.33\ KN \quad \nwarrow 30°$$

$$(a_G)_T = 4.90\ m/s^2$$

Ecuaciones de Movimiento

Rotación entorno a un eje fijo



$$\Sigma F_n = m(a_G)_n = m\omega^2 r_G$$

$$\Sigma F_t = m(a_G)_t = m\alpha r_G$$

$$\Sigma M_G = I_G \alpha$$

$$\circlearrowleft + \ \Sigma M_0 = r_G\, m(a_G)_t + I_G \alpha$$

$$\Sigma F_N = m(a_G)_n = m\omega^2 r_G$$

$$\Sigma F_T = m(a_G)_t = m\alpha r_G$$

$$\Sigma M_0 = I_0 \alpha$$

Si accel angular es variable

$$\alpha = \frac{d\omega}{dt}$$

$$\omega = \frac{d\theta}{dt}$$

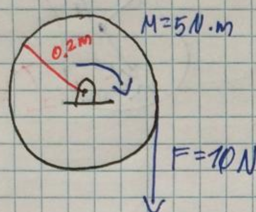
Si accel angular es cte

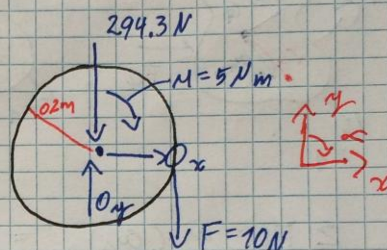
$$\omega = \omega_0 + \alpha t$$

$$\theta = \theta_0 + \omega_0 t + \frac{1}{2}\alpha t^2$$

$$\omega^2 = \omega_0^2 + 2\alpha(\theta - \theta_0)$$

Ej) El disco de 30Kg es sujetado por un perno en su centro. Si a avanza desde el reposo, determine el número de revs que debe planear antes de lograr una vel angular de 20 rad/s. ¿Cuales son las reacciones en el perno sobre el disco activa una fuerza cte F = 10 aplicada en mala que se envolla en superficie con un M cte = 5N·m, desprecie masa cuerda





Momento de inercia del disco en torno del perno es

$$I_0 = \frac{1}{2} m r^2 = \frac{1}{2}(30\,Kg)(0{,}2\,m)^2 = 0{,}6\,Kg \cdot m^2$$

Eq del mov.

$$\xrightarrow{+} \Sigma F_x = m(a_G)_x ; \quad = O_x = 0$$

$$+\uparrow \Sigma F_y = m(a_G)_y ; \quad O_y - 293\,N - 10\,N = 0$$

$$O_y = 304\,N$$

$$\circlearrowleft + \; \Sigma M_0 = I_0 \, \alpha$$

$$-10N(0.2m) - 5\,Nm = (-6)\alpha \quad \Rightarrow \quad \alpha = 11.7\, rad/s^2$$

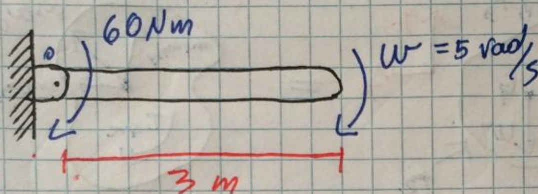
$$\circlearrowleft + \; \omega^2 = \omega_0^2 + 2\alpha(\theta - \theta_0)$$

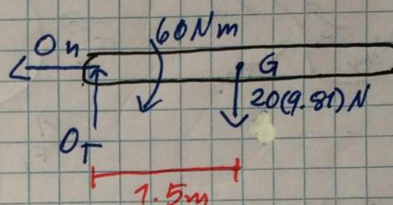
$$(-20\, rad/s)^2 = 0 + 2(-11.7\, rad/s^2)(\theta - 0)$$

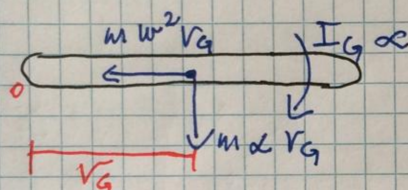
$$\theta = -17.1\, rad = 17.1\, rad \circlearrowright$$

$$\theta = 2.73\, rev \circlearrowright$$ //

Ej.) La varilla de 20 Kg, gira en el plano vertical, y en el instante mostrado tiene una velocidad angular de $w = 5 \, rad/s$. Determine la aceleración angular de la varilla y las componentes horiz. y vert. de la reacción del perno







Eq del mov

$$\overset{+}{\leftarrow} \Sigma F_n = m w^2 r_G - O_n = (20\,kg)(5\,rad/s)^2\,(1.5\,m)$$

$$O_n = 750\,N$$

$$\downarrow + \Sigma F_t = m \alpha r_G$$

$$-O_t + 20\,(9.81)\,N = (20\,kg)(\alpha)(1.5m)$$

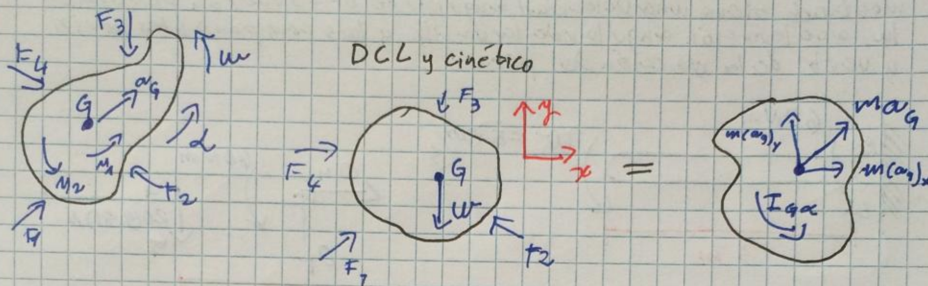
$$O_t = 19.0\,N$$

$$\circlearrowright + \quad \Sigma M_G = I_G \alpha$$

$$(19.0\,N)(1.5) + 60\,N\cdot m = \left[\frac{1}{12}(20kg)(3m)^2\right]\alpha$$

$$\alpha = 5.90\,rad/s^2$$

Movimiento en plano General



$$\Sigma F_x = m(a_G)_x$$

$$\Sigma F_y = m(a_G)_y$$

$$\Sigma M_G = I_G \alpha$$

En algunos problemas es conveniente sumar los momentos en torno de algún punto P que no sea G. Por lo general esto se hace para eliminar fuerzas desconocidas de la sumatoria de los momentos. Quedan estas Eq.

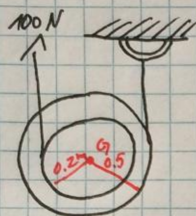
$$\Sigma F_x = m(a_G)_x$$

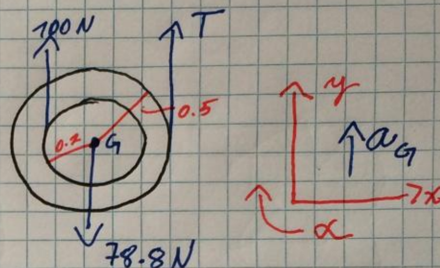
$$\Sigma F_y = m(a_G)_y$$

$$\Sigma M_P = \Sigma(M_g)_P$$

$\Sigma(M_P)_P$ representa la suma de momentos de $I_G\alpha$ y ma_G (o sus componentes) en torno al punto P según se determina por los datos del diagrama cinético.

Ej) El carrete tiene una masa de 8 Kg y un radio de giro de $K_G = 0.35\,m$. Si se envolla cuerdas (de masa despreciable) en torno del borde interior y exterior, determine la accel angular del carrete.





Momento de inercia del carrete:

$$I_G = m K_G^2 = 8(0.35)^2 = 0.980\ Kg \cdot m^2$$

Eq. de Mov.

$$+\uparrow \ \Sigma F_y = m(a_G)_y$$

$$T + 100\,N - 78.48\,N = (8\,Kg)(a_G)$$

$$\circlearrowleft + \ M_G = I_G \alpha;$$

$$100\,N\,(0.2\,m) - T\,(0.5\,m) = (0.980\,Kg\,m^2)\,\alpha$$

se obtiene una relación entre a_G con α, por cinemática

En tal caso el carrete gira sin deslizarse, sobre una cuerda en A, se utiliza Eq:

$$(\circlearrowleft +)\ a_G = \alpha r$$

$$a_G = 0.5\,\alpha$$

Despejando Eq.

$$\alpha = 10.3\ rad/s^2$$

$$a_G = 5.16\ m/s^2$$

$$T = 19.8\,N$$